Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije;
fizički smisao prvog izvoda

Primena izvoda funkcije

Ispitivanje toka funkcije

5.73. Primer. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x) = x^4 - x^2$ *(sl. 5.9).*

Rešenje. Data funkcija je definisana na celom skupu **R**.

Funkcija f je parna, jer je za sve $x \in \mathbb{R} : f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = f(x)$.

Nule funkcije f su za $f(x) = 0$, tj. za $x^4 - x^2 = 0$, što važi za

Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$, i njegove nule se nalaze iz $2x(2x^2 - 1) = 0$, što važi za $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}/2$ i $x_3 = -\sqrt{2}/2$.

Data funkcija raste ako je $f'(x) = 2x(2x^2 - 1) > 0$. Kako je $2x^2 - 1 > 0$ za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$, to za $x \in (\sqrt{2}/2, +\infty)$ važi $2x(2x^2 - 1) > 0$. Dalje je

Ispitivanje toka funkcije

$2x^2 - 1 < 0$ za $x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, pa za $x \in (-\sqrt{2}/2, 0)$ važi $2x(2x^2 - 1) > 0$.
Dakle, funkcija f raste na intervalima $(-\sqrt{2}/2, 0)$ i $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Slično se pokazuje da funkcija f opada na intervalima $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ i $(0, \sqrt{2}/2)$.

Drugi izvod funkcije f je $f'' = 12x^2 - 2$.

Kako je $f''(0) = -2 < 0$, to funkcija f u tački $A(0,0)$ ima lokalni maksimum.

Kako je $f''(\sqrt{2}/2) = 4 > 0$, to funkcija f u tački $B(\sqrt{2}/2, -1/4)$ ima lokalni minimum.

Kako je $f''(-\sqrt{2}/2) = 4 > 0$, to funkcija f u tački $C(-\sqrt{2}/2, -1/4)$ ima lokalni minimum.

Ispitivanje toka funkcije

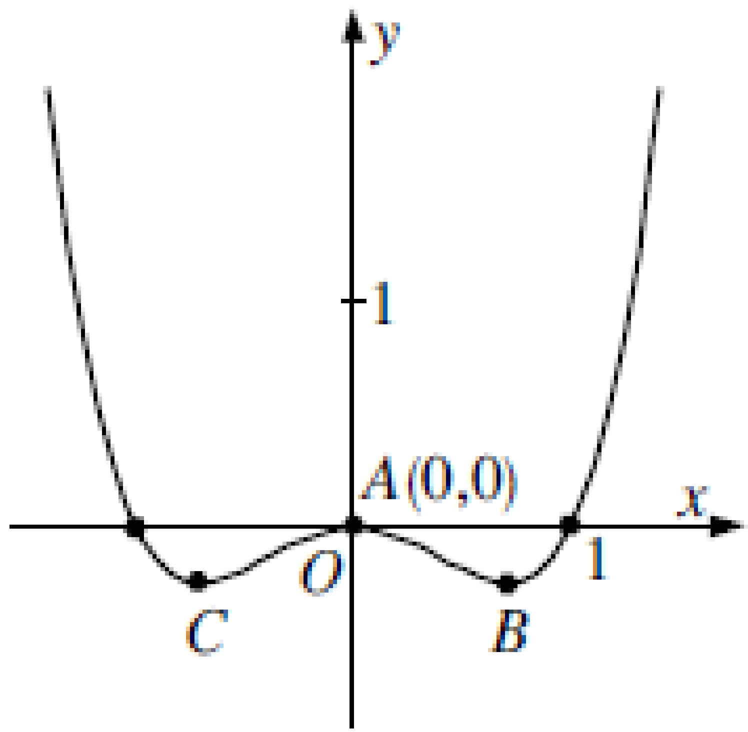
Funkcija f je konkavna odozgo ako je $f''(x) = 12x^2 - 2 > 0$, što je ispunjeno na intervalima $(-\infty, -\sqrt{6}/6)$ i $(\sqrt{6}/6, +\infty)$.

Funkcija je konkavna odozdo ako je $f''(x) = 12x^2 - 2 < 0$, što je ispunjeno na intervalu $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$.

Iz $f''(x) = 12x^2 - 2 = 0$ sledi $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}/6$, što znači da funkcija f ima moguće prevojne tačke $D(\sqrt{6}/6, -5/36)$ i $E(-\sqrt{6}/6, -5/36)$. Budući da, prema prethodnom, grafik funkcije menja svoju konkavnost u ovim tačkama, to su one zaista prevojne tačke funkcije f.

Data funkcija nema asimptota (sl. 5.9). ▶

Crtanje grafika funkcije



Slika 5.9 $f(x) = x^4 - x^2$

Ispitivanje toka funkcije

5.78. Primer: *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x^2+1}$ *(sl. 5.14).*

Rešenje. Data funkcija je definisana na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Funkcija f nije ni parna neparna. Nule funkcije f su za $x = -1$ i $x = 0$. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$. Prvi izvod funkcije f ima nule u tačkama $x_1 = 1+\sqrt{2}$ i $x_2 = 1-\sqrt{2}$, pa su kritične tačke $A(1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})/2)$ i $B(1-\sqrt{2}, (1-\sqrt{2})/2)$.

Funkcija f raste kada je $f'(x) > 0$, tj. za $-x^2+2x+1 > 0$, što važi za $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

Ispitivanje toka funkcije

Funkcija f opada kada je $f'(x) < 0$, tj. na intervalima $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ i $(1+\sqrt{2}, +\infty)$.

Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = 2\frac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$. Kako je $f''(1+\sqrt{2}) < 0$, to funkcija f ima lokalni maksimum u tački $A(1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})/2)$.
Kako je $f''(1-\sqrt{2}) > 0$, to funkcija f ima lokalni minimum u tački

Ispitivanje toka funkcije

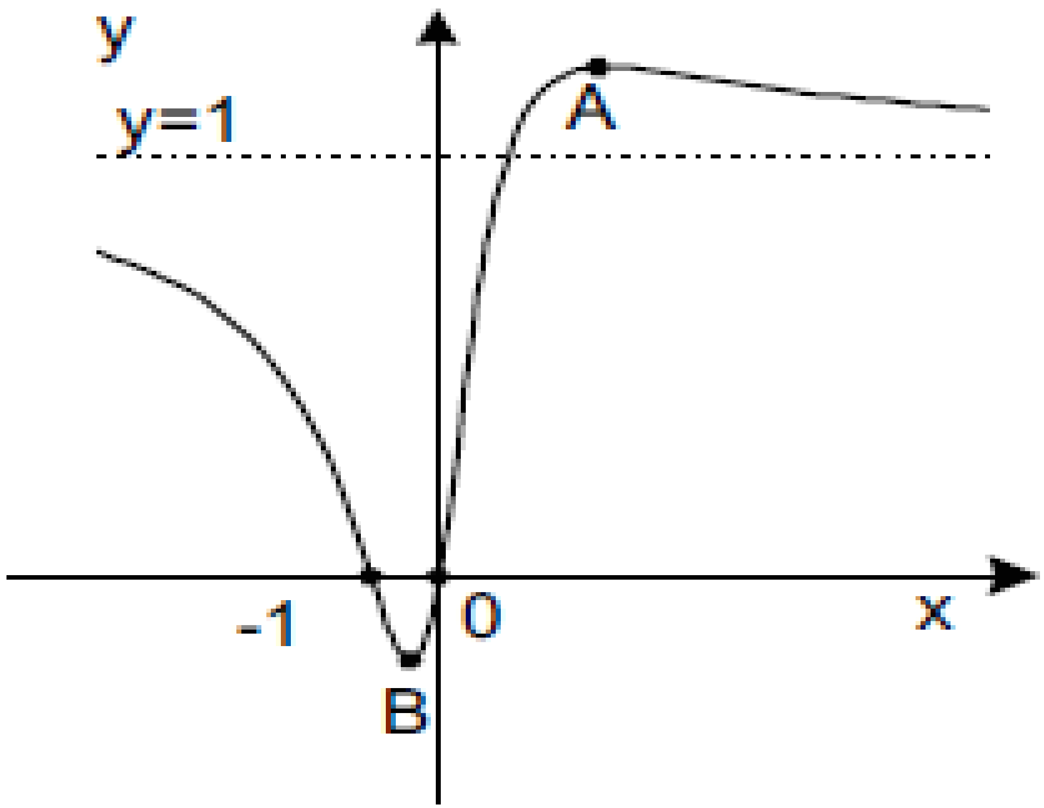
$B(1-\sqrt{2},(1-\sqrt{2})/2)$.

Funkcija f je konkavna odozgo za $f''(x)>0$, tj. na intervalima $(-1,2-\sqrt{3})$ i $(2+\sqrt{3},+\infty)$. Funkcija f je konkavna odozdo za $f''(x)<0$, tj. na intervalima $(-\infty,-1)$ i $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

Prevojne tačke su $C(-1,0)$, $D(2+\sqrt{3},(3+\sqrt{3})/4)$ i $E(2-\sqrt{3},(3-\sqrt{3})/4)$.

Asimptote: Vertikalnih asimptota nema. Funkcija f ima horizontalnu asimptotu $y=1$ kada $+\infty$, jer je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2+1}=1$. Takodje je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, pa je prava $y=1$ horizontalna asimptota i u $-\infty$. Funkcija f nema kosu asimptotu.▶

Crtanje grafika funkcije



Slika 5.14. $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2+1}$

Ispitivanje toka funkcije

5.79. Primer. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije* $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-4}$ *(sl. 5.15).*

Rešenje. Data funkcija je definisana na skupu $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Funkcija f nije ni parna ni neparna. Nula funkcije f je za $x = -\sqrt[3]{4}$. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = x\frac{x^3-12x-8}{(x^2-4)^2}$.

Ako označimo $g(x) = x^3-12x-8$, tada je $g(-4) < 0$ i $g(-3) > 0$, pa postoji tačka $x_1 \in (-4,-3)$ takva da je $g(x_1) = f'(x_1) = 0$. Slično se pokazuje da postoje tačke $x_2 \in (-1,0)$ i $x_3 \in (3,4)$ sa osobinom $g(x_2) = g(x_3) = 0$.

Ispitivanje toka funkcije

Prema tome, funkcija f ima četiri kritične tačke $A(0,-1)$, $B(x_1, f(x_1))$, $C(x_2, f(x_2))$ i $D(x_3, f(x_3))$.

Funkcija f raste na intervalima $(-\infty, x_1)$, $(x_2, 0)$ i $(x_3, +\infty)$.

Funkcija f opada na intervalima $(x_1, -2)$, $(-2, x_2)$, $(0,2)$ i $(2, x_3)$.

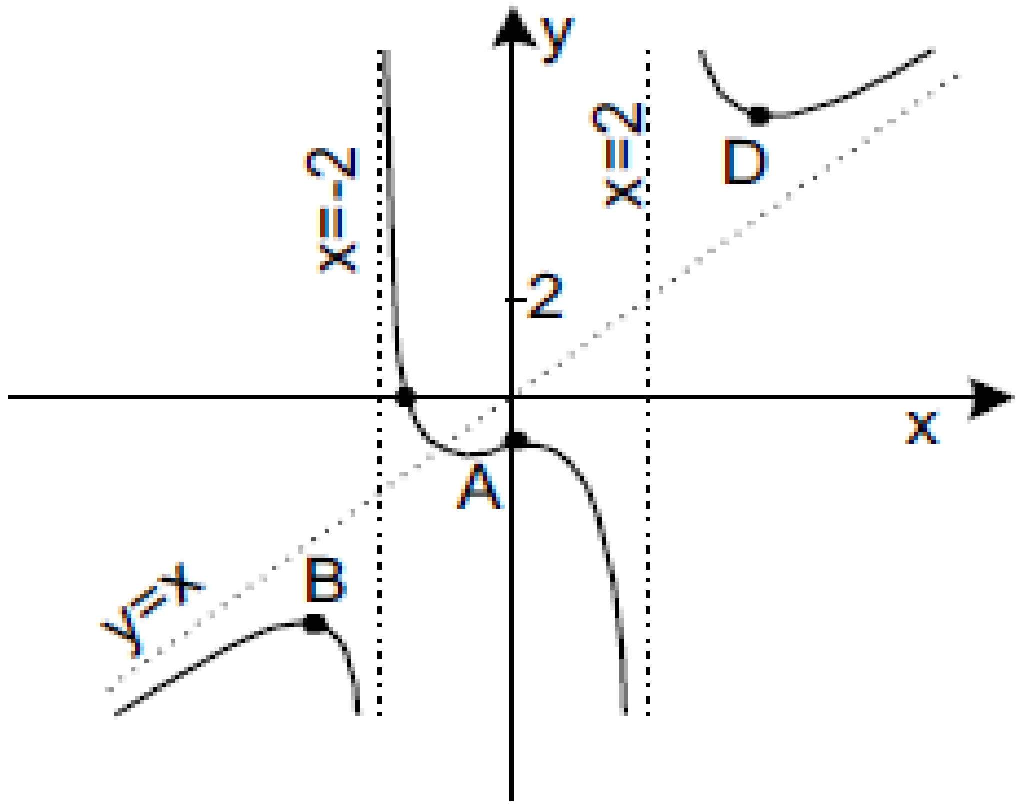
Iz prethodnog sledi da su tačke A i B lokalni maksimumi, a tačke C i D lokalni minimumi.

Ispitivanje toka funkcije

Asimptote: Vertikalne asimptote su $x = -2$ i $x = 2$, jer važi $\lim\limits_{x\to-2-} \frac{x^3+4}{x^2-4} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2-} \frac{x^3+4}{x^2-4} = -\infty$. Takodje je $\lim\limits_{x\to-2+} \frac{x^3+4}{x^2-4} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to2+} \frac{x^3+4}{x^2-4} = +\infty$. Funkcija f nema horizontalnu asimptotu.

Funkcija f ima kosu asimptotu $y = x$ i u $+\infty$ i u $-\infty$ jer je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3-4x} = 1$. $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x+4}{x^2-4} = 0$.

Crtanje grafika funkcije



Slika 5.15. $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-4}$

Fizički smisao izvoda

5.13.5 Fizički smisao izvoda

Ako funkcija $s = s(t), t \geq 0$, opisuje pređeni put materijalne tačke (kao funkciju vremena t), tada je prvi izvod funkcije s u tački $t_0 > 0$ (ako postoji), **trenutna brzina** te materijalne tačke u momentu t_0, dok je drugi izvod funkcije s u tački t_0 (ako postoji) **trenutno ubrzanje** te materijalne tačke u momentu t_0.

Fizički smisao izvoda

5.67. Primer. *Telo se kreće pravolinijski, a udaljenost od početne tačke data je zakonom* $s = t^3 - 12t^2 + 36t$, *gde je vreme t dato u sekundama, a put s u metrima.*

a) *Odrediti vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja povećava i vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja smanjuje.*

b) *Odrediti vremenski interval u kome se brzina v povećava i vremenski interval u kome se brzina v smanjuje.*

c) *Odrediti razdaljinu tela od početne tačke posle 7 sekundi.*

Fizički smisao izvoda

Rešenja. Prema prethodnom, brzina posmatranog tela je $v(t)=s'(t)=3t^2-24t+36$, a ubrzanje je $a(t)=s''(t)=6t-24$.

a) Udaljenost s od početnog položaja se povećava ako je $s'(t)=v(t)>0$, tj. za

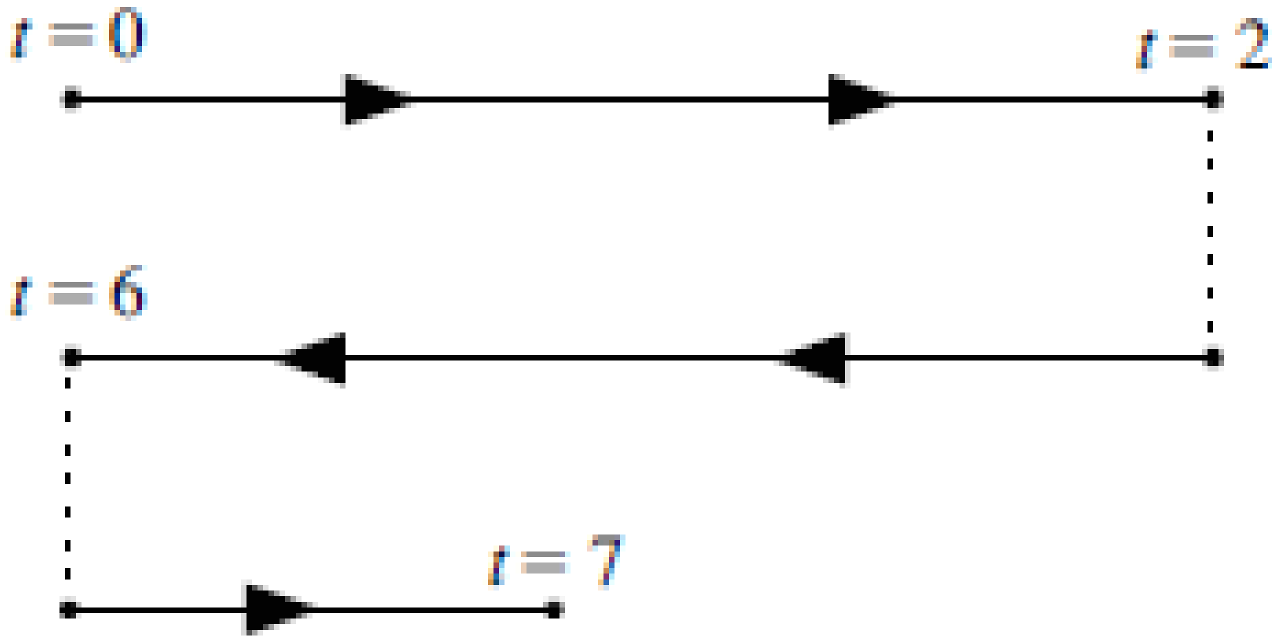
$$3t^2-24t+36=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)>0.$$

To se dešava za $0<t<2$ i $t>6$. Udaljenost s od početnog položaja se smanjuje ako je $s'(t)=v(t)=3(t-2)(t-6)<0$, tj. za $2<t<6$.

b) Brzina se povećava ako je $v'(t)=a(t)=6t-24>0$, tj. ako je $t>4$.

Brzina se smanjuje ako je $v'(t)=a(t)=6t-24<0$, tj. ako je $0<t<4$.

Fizički smisao izvoda



Slika 5.7.

Fizički smisao izvoda

c) U početnom trenutku $t=0$ je $s=0$, tj. telo je u tački O. U vremenu $0<t<2$ dužina puta se povećava, što znači da se telo kreće u desno, tj. u pozitivnom smeru s ose. Za $t=2$ je $s=32$m. Za sledeće 4 sekunde, tj. za $2<t<6$, rastojanje od tačke O se smanjuje, tj. telo se kreće u levo (u negativnom smeru s–ose). Za $t=6$ je $s=0$, tj. telo se vratilo u tački O. Ako se t dalje povećava, tj. za $6<t<7$, telo se ponovo kreće u desno i za $t=7$ je udaljeno $s=7$ m od tačke O (sl. 5.7). ▶

Primena izvoda

5.70. Primer. *Odrediti dimenzije kontejnera oblika kružnog valjka date zapremine* $V = 24\pi m^3$ *tako da cena utrošenog materijala bude minimalna, ako je materijal koji se koristi za dno tri puta skuplji od materijala za omotač.*

Rešenje. Ako označimo sa r poluprečnik kruga koji se nalazi u osnovi valjka, sa H njegovu visinu, tada zbog $V = Hr^2\pi$ možemo pisati $H = 24/r^2$. Ako sa c dinara označimo cenu kvadratnog metra materijala koji se koristi za omotač valjka, tada

Primena izvoda

omotač valjka staje $c(2\pi rH)$, a osnova staje $3c(\pi r^2)$. Ukupna cena materijala za ceo valjak je

$$C(r) = c(2\pi rH) + 3c(\pi r^2) = c\pi(3r^2 + 2rH) = c\pi\left(3r^2 + \frac{48}{r}\right).$$

Kako je $C'(r) = c\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 6c\pi\left(\frac{r^3-8}{r^2}\right)$, to je $C'(r) = 0$ za $r = 2$. Zbog $C''(r) = c\pi\left(6 + \frac{96}{r^3}\right)$ je $C''(2) > 0$, pa će se najjeftiniji valjak dobiti ako je poluprečnika $2\,\text{cm}$ i visine $6\,\text{cm}$. ▶

Pitanja:

1. Koja osobina grafika funkcije iz primera 5.73. potiče iz činjenice da je parna?
2. Koja osobina grafika funkcije potiče iz činjenice da smo odredili nule funkcije iz primera 5.73?
3. Ako je neka funkcija pozitivna za pozitivne vrednosti promenljive *x*, gde će se nalaziti njen grafik u odnosu na pozitivan deo *x* ose?
4. Ako je prvi izvod funkcije nula za neko x, šta možemo reći o toj funkciji?
5. Pokazati da funkcija iz primera 5.73. nema asimptotu.
6. Kako to da funkcija iz primera 5.78 definisana na R kada je njena fornula u obliku razlomka?
7. Zašto funkcija koja ima horizontalnu asimptotu, nema kosu as.?
8. Da li funkcija može imati i vertikalnu i horizontalnu asimptotu?
9. Dajte primer jedne takve funkcije.
10. Zašto nam je u svakodnevnom životu bitno da znamo trenutnu brzinu kretanja?

Literatura

- Hadžić, O., Takači, Đ. (2010). *Matematičke metode: za studente prirodnih nauka.* Simbol, Novi Sad.