Neodređeni integral

Neodređeni integral

6.1. Definicija. *Funkcija F je* **primitivna funkcija** *za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) ako važi*

$$(\forall x \in (a,b)) \qquad F'(x) = f(x). \tag{6.1}$$

6.2. Definicija. Neodređeni integral *funkcije f na intervalu $[a,b]$ je skup svih primitivnih funkcija za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Neodređeni integral

Neodređeni integral funkcije f označavamo sa $\int f(x)\,dx$. Izraz "dx"označava diferencijal promenljive x. Fundamentalna je činjenica da svaka neprekidna funkcija na intervalu ima primitivnu funkciju na tom intervalu. Iz Lagranžove teoreme sledi da se bilo koje dve primitivne funkcije koje odgovaraju jednoj neprekidnoj funkciji razlikuju najviše za konstantu. Zbog toga, ako važi jednakost (6.1), pisaćemo u nastavku

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{6.2}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

(Uopšte, u celoj ovoj glavi C označava proizvoljnu konstantu.)

Tablica neodređenih integrala

Tablica osnovnih neodređenih integrala se može dobiti iz odgovarajuće tablice prvih izvoda i primenom osnovnih pravila za izvod funkcije nad njihovim prirodnim definicionim skupovima. Ostavljamo čitaocu da odredi *najveće* skupove u $\mathbb{R}$

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$
- $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C;$
- $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C;$

Osobine neodređenih integrala

Na osnovu osobina prvog izvoda lako se pokazuje da je integral linearna operacija, tj. da važe sledeće dve jednakosti:

- $\int C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int f(x)\,dx$; pod uslovom da je konstanta C različita od nule.
- $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

Primer

6.3. Primer. *Korišćenjem linearnosti i tablice osnovnih neodređenih integrala izračunati:*

a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{3} z - 3\sqrt{z} \right) dz;$

Rešenja.

a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{3} z - 3\sqrt{z} \right) dz = \int \left(z^{-1/2} + z/3 - 3z^{1/2} \right) dz = \frac{z^{1/2}}{1/2} + \frac{z^2}{6} - 3\frac{z^{3/2}}{3/2} + C$

$$= \; 2z^{1/2} + \frac{z^2}{6} - 2z^{3/2} + C.$$

Metoda smene

Oblik podintegralne funkcije i pravilo za izvod složene funkcije često dozvoljava svođenje datog integrala na jednostavniji integral. Na primer, ako je funkcija ϕ diferencijabilna i monotona na posmatranom intervalu, tada integral

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx \quad \text{smenom} \quad t=\phi(x), \quad dt=\phi'(x)\,dx \tag{6.3}$$

postaje $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$

Metoda smene

6.4. Primer. *Izračunati:*

a) $\int (x^3+3)^2 3x^2\,dx;$

Rešenja. Integrali **a)** i **b)** rešavaju se smenom $t = x^3+3,\ dt = 3x^2\,dx.$

a) $\int (x^3+3)^2 3x^2\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^3+3)^3}{3} + C.$

Metoda parcijalne integracije

Ako su u i v diferencijabilne funkcije po promenljivoj x, tada važi

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Integraleći ovu jednakost dobijamo **formulu parcijalnog integraljenja**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{6.4}$$

Metoda parcijalne integracije

6.10. Primer. *Primenom parcijalnog integraljenja izračunati sledeće integrale*

a) $\int xe^x\,dx$; **b)** $\int x^3e^{2x}\,dx$;

Rešenja.

a) Ako je $u=x$, $dv=e^x\,dx$, tada je $du=dx$, $v=e^x$, pa je na osnovu (6.4)

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Metoda parcijalne integracije

b) Ako je $u = x^3$, $dv = e^{2x}dx$, tada je $du = 3x^2\,dx$, $v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$, pa je

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\,dx.$$

Poslednji integral se dalje rešava primenom parcijalnog integraljenja. Naime, za $u_1 = x^2$ i $dv_1 = e^{2x}\,dx$ je $du_1 = 2x\,dx$ i $v_1 = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$, pa je

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{2}{2}\int x e^{2x}\,dx.$$

Primenjujući parcijalno integraljenje na integral $\int x e^{2x}\,dx$, dobijamo za $u_2 = x$ i $dv_2 = e^{2x}\,dx$ da je $du_2 = dx$ i $v_2 = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$, pa je

Metoda parcijalne integracije

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\,dx + C.$$

Prema tome posle tri puta primenjene parcijalnog integraljenja, dobija se

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}\right) + C.$$

Drugi način da se reši ovaj integral jeste da se pretpostavi oblik rešenja, tj. da je

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x} + C$$

Metoda parcijalne integracije

za neke konstante a, b i c, koje treba odrediti. Diferenciranjem se dobija

$$x^3e^{2x} = \left(3ax^2 + 2bx + c\right)e^{2x} + 2\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x}, \text{ odnosno}$$

$$x^3e^{2x} = \left(2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + (c + 2d)\right)e^{2x}.$$

Iz sistema jednačina $2a = 1$, $3a + 2b = 0$, $2b + 2c = 0$, $c + 2d = 0$, dobija se $a = 1/2$, $b = -3/4$, $c = 3/4$, $d = -3/8$, što ponovo daje isto rešenje.

Tipovi neodređenih integrala

6.6.1 Integrali racionalnih funkcija

6.12. Primer. *Izračunati sledeće integrale:*

$$\text{a) } \int \frac{(x^3-2x-35)\,dx}{x^2-2x-15}; \quad \text{b) } \int \frac{(x+1)\,dx}{x^3-2x^2+x-2}; \quad \text{c) } \int \frac{(x+3)\,dx}{x^4-5x^2+4};$$

$$\text{d) } \int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x-1)^3}; \quad \text{e) } \int \frac{(2x^2-4x+3)\,dx}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}; \quad \text{f) } \int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx.$$

Tipovi neodređenih integrala

Rešenje.

a) Na osnovu $\dfrac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=x+2+\dfrac{17x-5}{x^2-2x-15}=x+2+\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x+3}$,

dobija se sistem jednačina $A+B=17,\quad 3A-5B=-5,\quad$ tj. $\quad A=10,\quad B=7$, pa je

$$\frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}=x+2+\frac{10}{x-5}+\frac{7}{x+3}.$$

Prema tome je

$$\int\frac{(x^3-2x-35)\,dx}{x^2-2x-15}=\int(x+2)\,dx+\int\frac{10\,dx}{x-5}+\int\frac{7\,dx}{x+3}=\frac{x^2}{2}+2x$$

$$+10\ln|x-5|+7\ln|x+3|+C=\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|(x-5)^{10}\cdot(x+3)^7\right|+C.$$

Tipovi neodređenih integrala

b) Kako je $\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+D}{x^2+1}=\dfrac{(A+B)x^2+(D-2B)x+A-2D}{x^3-2x^2+x-2}$,

tj. $A+B=0$, $D-2B=1$ i $A-2D=1$, odakle je $A=3/5$, $B=-3/5$, $D=-1/5$, to je

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^3-2x^2+x-2}=\int\frac{3dx}{5(x-2)}-\int\frac{(3x+1)dx}{5(x^2+1)}=\frac{1}{5}\left(3\ln|x-2|-\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}(3\ln|x-2|-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C.$$

Tipovi neodređenih integrala

c) Data racionalna funkcija može se transformisati kao

$$\frac{x+3}{x^4-5x^2+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{x+2},$$

gde su $A=-2/3$, $B=1/3$, $D=5/12$ i $E=-1/12$. Prema tome je

Tipovi neodređenih integrala

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(x+3)\,dx}{x^4-5x^2+4} &= -\int \frac{2\,dx}{3(x-1)} + \int \frac{dx}{3(x+1)} + \int \frac{5\,dx}{12(x-2)} - \int \frac{dx}{12(x+2)} \\
&= \frac{-2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{12}\ln|x+2| + C \\
&= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x+1)^4(x-2)^5}{x-1)^8(x+2)}\right| + C.
\end{aligned}
$$

Tipovi neodređenih integrala

d) Data podintegralna funkcija se može pisati kao $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}=\dfrac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+D}{(x-1)^3}$,

odakle se posle sređivanja dobija sistem jednačina

$$A=1,\quad -2A+B=0,\quad A-B+D=1,$$

čija su rešenja $A=1$, $B=2$ i $D=2$, tako da je

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$ Prema tome je

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x-1)^3}=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2\,dx}{(x-1)^2}+\int\frac{2\,dx}{(x-1)^3}=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

Tipovi neodređenih integrala

e) U ovom slučaju za podintegralnu funkciju važi

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}.$$

$$\int\frac{(2x^2-4x+3)\,dx}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}=\int\frac{2\,dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{-2\,dx}{x-2}+\int\frac{3\,dx}{(x-2)^2}$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C=2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{4x-5}{x^2-3x+2}+C.$$

Tipovi neodređenih integrala

f) Iz jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} &= \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{D}{2x-1}=\frac{(Ax+B)(2x-1)+D(x^2+4)}{2x^3-x^2+8x-4}\\ &= \frac{(2A+D)x^2+(-A+2B)x-B+4D}{2x^3-x^2+8x-4}\end{aligned}$$

dobija se sistem jednačina $2A+D=1,\quad -A+2B=-1,\quad -B+4D=-21$, odakle je $A=3$, $B=1$ i $D=-5$. Prema tome važi

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{3x+1}{x^2+4}+\frac{5}{2x-1}\text{, pa je}$$

$$\int\frac{(x^2-x-21)\,dx}{2x^3-x^2+8x-4}=\int\frac{(3x+1)\,dx}{x^2+4}+\int\frac{5\,dx}{2x-1}=\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}$$

$$+\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{5\,dx}{2x-1}=\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{5}{2}\ln|2x-1|+C. \quad \blacktriangleright$$

Pitanja:

1. Da li izvod i integral jedne funkcije imaju neke međusobne veze?
2. Kako se definiše integral jedne funkcije ?
3. Da li ma koja funcija ima svoj integral na nekom otvorenom intervalu?
4. Da li je integral neke funkcije jednoznačno određen?
5. Koja je razlika između integrala neke funkcije i njene primitivne funkcije?
6. Odredite dve različite primitivne funkcije za funkciju $f(x) = x$?
7. Dajte konkretni primer za funkciju i konstantu kod prve osobine na slajdu broj 5?
8. Dajte konkretni primere za funkcije kod druge osobine na slajdu broj 5?
9. Kada se koristi metoda zamene kod rešavanja integrala?
10. Kada se koristi metoda parcijalne integracije kod rešavanja integrala?

Literatura

- Hadžić, O., Takači, Đ. (2010). *Matematičke metode: za studente prirodnih nauka.* Simbol, Novi Sad.